b) soit $\varphi(x)=tgx-x$ $\quad x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

$\varphi'(x)=tg^2x\geq 0$

φ est croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

$x\geq 0\Rightarrow\varphi(x)\geq 0\Rightarrow tgx-x\geq 0\Rightarrow tgx\geq x$

2) a) on pose $h(x)=tgx-2x$ $\quad x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

$h'(x)=tg^2x-1$

x	0		π/4		π/2
h'(x)		-	0	+	
h(x)	0	↘	1-π/2	↗	+∞

* h est continue et strictement décroissante

sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right[$ d'où $h\left(\left[0,\frac{\pi}{4}\right[\right)=\left]1-\frac{\pi}{2},0\right]$

$0\in\left]1-\frac{\pi}{2},0\right]$ d'où il existe un unique réel

$\beta\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right[$ tel que : $h(\beta)=0$

or $h(0)=0\Rightarrow\beta=0$

* $h\left(\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[\right)=\left[1-\frac{\pi}{2},+\infty\right[$

$0\in\left[1-\frac{\pi}{2},+\infty\right[$

d'où il existe un réel $\alpha\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ tq : $h(\alpha)=0$

comme h est strictement croissante sur $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$

alors α est unique

conclusion : l'équation : $h(x)=0\Leftrightarrow tg(x)=2x$

admet 0 et α comme seules solutions dans $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

* $h\left(\left]\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right[\right)=\left]\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3},+\infty\right[$

$0\in\left]\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3},+\infty\right[\Rightarrow\alpha\in\left]\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right[$

$\Rightarrow\alpha\geq\frac{\pi}{3}$

b) $h(x)=tgx-2x$

x	-∞		α		π/2
h(x)	0	-	0	+	‖

3) $\begin{cases}U_0=\frac{\pi}{3}\\ U_{n+1}=\varphi(U_n)\end{cases}$

a) * pour n=0 $\quad 0\leq U_0=\frac{\pi}{3}\leq\frac{\pi}{3}$

* supposons que : $0\leq U_n\leq\frac{\pi}{3}$

montrons que : $0\leq U_{n+1}\leq\frac{\pi}{3}$

$0\leq U_n\leq\frac{\pi}{3}\Rightarrow\varphi(0)\leq\varphi(U_n)\leq\varphi(\frac{\pi}{3})$

$\Rightarrow 0\leq U_{n+1}\leq\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\Rightarrow 0\leq U_{n+1}\leq\frac{\pi}{3}$

conclusion : $0\leq U_n\leq\frac{\pi}{3}$; $\forall n\in\mathbb{N}$

b) d'aprés 2) b)

$U_n\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]\Rightarrow h(U_n)\leq 0\Rightarrow tgU_n-2U_n\leq 0$

$\Rightarrow tgU_n-U_n\leq U_n\Rightarrow U_{n+1}\leq U_n$

d'où (U_n) est décroissante

c) (U_n) décroissante et minorée par 0

elle est donc convergente : soit ℓ sa limite

$\ell=\varphi(\ell)\Leftrightarrow tg\ell=2\ell\Leftrightarrow\ell=0$ car $\ell\leq\frac{\pi}{3}$

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn